Lycée Kheniss	Devoir de contrôle N°2	Prof : ************
A.S 2007-2008	Mathématiques Durée : 2h	4 ème Sc 2 Le 04/02/2008

EXERCICE N°1 : (4pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points A(1, 2, -1) et B(2, 1, 1).

1) Trouver une équation du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).

2) Soit P_m le plan d'équation : $x + y + m - 3 = 0$, où m est un paramètre réel.

a) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m.

b) Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q.

3) Soit A' et B' les projetés orthogonaux de A et B sur le plan P_m

Déterminer les valeurs de m pour que ABB'A' soit un carré.

EXERCICE N°2: (6pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera son centre I et son rayon r.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x - y + z + 3 = 0$

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S \cap P$.

3) Soit P_m le plan dont une équation cartésienne est : $mx + (1-m)y + (1-m)z + m - 3 = 0$

a) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda + 2 \end{cases} \quad \lambda \in IR$

Vérifier que la droite Δ est incluse dans le plan P_m pour tout réel m.

b) Montrer que la droite Δ est tangente à la sphère S en un point A que l'on précisera.

c) Calculer la distance $d(I,P_m)$ du point I au plan P_m.

d) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S.

Que peut- on dire du point de contact ?

EXERCICE N°3 (4pts)

Soit f : $[0, \pi/2[\to IR$, $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$

1) Etudier les variations de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[1, +\infty[$.

3) On note f^{-1} la fonction réciproque de f ; montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

4) Montrer que l'équation $f(x) = -x + 3$ admet une unique solution α dans $[0, \pi/2[$ et que $\alpha \in]\pi/4, \pi/3[$

5) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE N°4 (6pts)

I) 1) Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = -1 + \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{-1}{2(x^2-x)\sqrt{x^2-x}}$

c) Etudier les variations de f et en déduire que pour tout x : $f(x) > 0$.

2) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-x}$ et (ζ_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

a) Etudier la dérivabilité de g à droite en 1 . Interpréter graphiquement ce résultat

b) Vérifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a : $g'(x) = \frac{1}{2} f(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer que la droite D : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est une asymptote de (ζ_g).

3) a) Vérifier que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $(g^{-1})'(1)$. (g^{-1} étant la fonction réciproque de g)

4) Tracer D, (ζ_g) et $(\zeta_{g^{-1}})$: la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.